Durée : 3 heures

Baccalauréat ES Centres étrangers 11 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

*Pour chacune des questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à* 0.

1. Le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$ est égal à :

   a. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2}}$ **b.** $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2}$ **c.** $\left(\sqrt{\mathrm{e}^{x}}\right)^{3}$

2. L'équation $\ln\left(x^2 + x + 1\right) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

3. L'équation $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-x}$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

4. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ vérifiant la propriété suivante :

   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   On peut alors affirmer que :

   a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

5. On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que g est une primitive de la fonction f sur I. On suppose que la fonction g est croissante sur I. Alors on peut affirmer que :

   a. La fonction g est positive sur I. **b.** La fonction f est positive sur I. **c.** La fonction f est croissante sur I.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la dette en milliards d'euros de l'État français entre 1990 et 2004 :

Année	1990	1992	1994	1996	1998	2000	2002	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Dette y_i en milliards d'euros	271,7	321,4	443	540,1	613,1	683,5	773,4	872,6

Source : INSEE

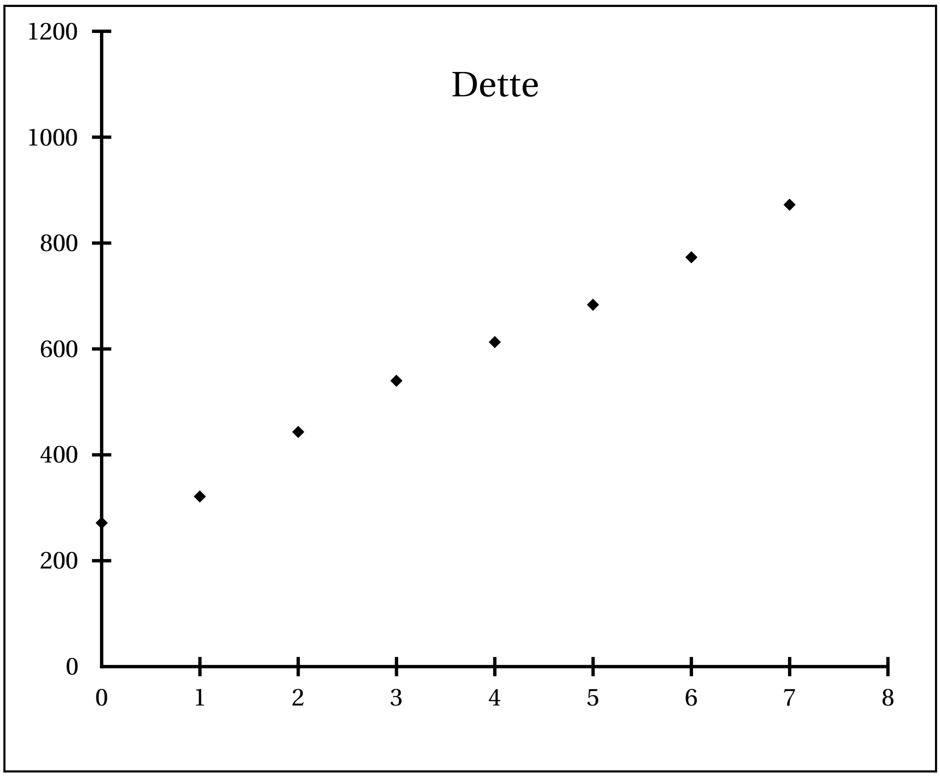
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au dixième.

Partie A : Étude statistique

1. Calculer la dette moyenne de l'État entre 1990 et 2004.
2. En prenant l'année 1990 comme référence (indice 100), calculer les indices correspondant à la dette de l'État de 1992 à 2004. Donner la réponse sous forme d'un tableau.
3. Déterminer le taux global d'évolution de la dette de l'État entre 1990 et 2004.
4. Déterminer le taux moyen d'évolution de la dette de l'État sur une période de deux ans.

Partie B : Interpolation et extrapolation de données

On donne ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.



La forme du nuage permet d'envisager un ajustement affIne.

1. En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. Selon cet ajustement, à partir de quelle année peut-on estimer que l'État aurait dépassé les 1 000 milliards de dette ?
3. Selon cet ajustement, déterminer l'année à partir de laquelle la dette de l'État sera le double de la dette de l'an 2000.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :

   $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.
   b. Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

   $$u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n.$$

   b. En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.
On considère les évènements suivants :
G : « le téléphone possède l'option GPS ».
W : « le téléphone possède l'option Wifi ».
Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

   On suppose que la probabilité de W est : $p(\text{W}) = \dfrac{7}{10}$.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».
4. Démontrer que $p_{\overline{\text{G}}}(\text{W}) = \dfrac{23}{30}$. Compléter l'arbre du **2.**
5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

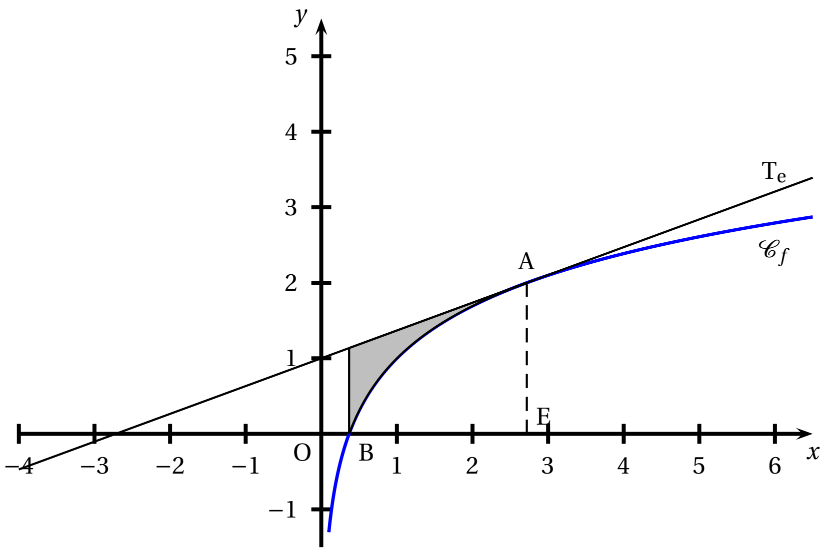
   Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.
6. Déterminer la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options.
7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées (e ; 0).
On admettra que sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1. **a.** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées du point B.
   b. Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{e}$, $f(x) \geqslant 0$.
2. **a.** Déterminer une équation de T_e.
   b. En déduire les coordonnées du point C.
   c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

   On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.
3. **a.** Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} (1 + \ln x)\,dx$. Interpréter ce nombre.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T_e et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.